Übungsblatt 7 - Musterlösung

Technische Hochschule Mittelhessen, Mathematik 2 für EI, Prof. Dr. B. Just

Aufgabe 1

Hier gibt es logischerweise keine Musterlösung ☺

Aufgabe 2

a)

i)

$$
\begin{aligned}
y' &= \cos(x) \cdot y^2 \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \cos(x) \cdot y^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{y^2} \cdot dy &= \cos(x) \\
\Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\ dy &= \int \cos(x)\ dx \\
\Rightarrow \frac{-1}{y} &= \sin(x) + c \\
\Rightarrow y &= \frac{1}{-\sin(x) - c} \qquad \text{(allgemeine Lösung)} \\
\Rightarrow y(\pi) = 1 &\Rightarrow \frac{1}{-\sin(\pi) - c} = 1 \Rightarrow c = -1 \\
\Rightarrow y &= \frac{1}{-\sin(x) + 1} \qquad \text{(spezielle Lösung)}
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
y' &= x \cdot \sin(x) \cdot \cos^2(y) \\
\Rightarrow \frac{dy}{dx} &= x \cdot \sin(x) \cdot \cos^2(y) \\
\Rightarrow \frac{1}{\cos^2(y)}\ dy &= x \cdot \sin(x)\ dx \\
\Rightarrow \int \frac{1}{\cos^2(y)}\ dy &= \int x \cdot \sin(x)\ dx \\
\Rightarrow \tan(y) &= \sin(x) - x \cdot \cos(x) + c \\
\Rightarrow y &= \arctan(\sin(x) - x \cdot \cos(x) + c) \qquad \text{(allgemeine Lösung)} \\
y(0) = 1 &\Rightarrow c \text{ erfüllt } \arctan(c) = 1 \Rightarrow c = \tan(1) \\
\text{spezielle Lösung ist } y &= \arctan(\sin(x) - x\cos(x) + \tan(1))
\end{aligned}
$$

Bem.

$$
\begin{aligned}
\tan(1) &\approx 1.557 \quad \text{(Bogenmaß)} \\
\tan(1) &\approx 0.174 \quad \text{(Gradmaß)}
\end{aligned}
$$

b)

i)

$$y' = \sin(2x) \cdot y$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin(2x) \cdot y$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot dy = \sin(2x)\ dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\ dy = \int \sin(2x)\ dx$$
$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{-1}{2} \cos(2x) + c$$
$$\Rightarrow |y| = e^{\frac{-1}{2}\cos(2x)+c}$$
$$y = \pm e^c \cdot e^{\frac{-1}{2}\cos(2x)}$$

Da $\pm e^c$ für $c \in \mathbb{R}$ alle reellen Zahlen $\neq 0$ durchläuft, und $y = 0$ auch eine Lösung der DGL ist, kann man auch schreiben:

$$\text{Allgemeine Lösung ist } y = c \cdot e^{\frac{-1}{2}\cos(2x)}$$

ii)

$$y' = f(x) \cdot y$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y}\ dy = f(x)\ dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\ dy = \int f(x)\ dx$$
$$\Rightarrow \ln|y| + c = \int f(x)\ dx$$
$$\Rightarrow |y| \cdot e^c = e^{\int f(x)\ dx}$$
$$\Rightarrow y = \pm e^c \cdot e^{\int f(x)\ dx}$$

Da $\pm e^c$ für $c \in \mathbb{R}$ alle reellen Zahlen $\neq 0$ durchläuft, und $y = 0$ auch eine Lösung der DGL ist, kann man auch schreiben:

$$\text{Allgemeine Lösung ist } y = c \cdot e^{\int f(x)\ dx}$$

c)

$$y' + ay = b$$
$$\Rightarrow y' = b - ay$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = b - ay$$
$$\Rightarrow \frac{1}{b - ay}\ dy = 1\ dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{b - ay}\ dy = \int 1\ dx$$
$$\Rightarrow \frac{-1}{a} \ln|b - ay| = x + c,\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \ln|b - ay| = -ax - ca$$
$$\Rightarrow b - ay = \pm e^{-ax} \cdot e^{-ca}$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{a} \ \pm \ e^{-ax} \cdot \frac{e^{-ca}}{a}$$

Da $\pm\frac{e^{-ca}}{a}$ für $c \in \mathbb{R}$ alle reellen Zahlen $\neq 0$ durchläuft,ist die allgemeine Lösung:

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}, \ c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Aufgabe 3

a.)

$y' - 4y = 0.$

Charakteristisches Polynom $\lambda - 4$

Nullstelle bei $\lambda = 4$

Einfache reelle Nullstelle $\Rightarrow$ Basislösung $y = e^{4x}$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = C \cdot e^{4x}, \quad C \in \mathbb{R}$

b.) Probe für a.)

$y = C \cdot e^{4x}, \quad C \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y' = 4 \cdot C \cdot e^{4x}$

$\Rightarrow y' - 4y = 4 \cdot C \cdot e^{4x} - 4 \cdot C \cdot e^{4x} = 0.$

c.) Allgemeine Lösung ist $y = C \cdot e^{4x}$

Mit $y(0) = 10$ folgt $C \cdot e^{4 \cdot 0} = 10 \Rightarrow C = 10$

Spezielle Lösung ist $y = 10 \cdot e^{4x}$

d.) $y'' - 2y' + 5y = 0$

Charakteristisches Polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 5$

Nullstellen bei $\lambda_{1|2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2j$

Komplexes Nullstellenpaar

$\Rightarrow$ Basislösung $y_1 = e^x \cdot \sin(2x), y_2 = e^x \cdot \cos(2x)$

Allgemeine Lösung: $C_1 e^x \sin(2x) + C_2 e^x \cos(2x)$

e.) Allgemeine Lösung $y = C_1 e^x \sin(2x) + C_2 e^x \cos(2x)$

Mit $y(0) = 1$ und $y(\frac{\pi}{4}) = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}}$ folgt

$C_1 \cdot e^0 \cdot (\sin 0) + C_2 \cdot e^0 \cdot \cos(0) = C_2 = 1$ und

$C_1 \cdot e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) + C_2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) = C_1 \cdot e^{\frac{\pi}{4}} = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{4}},$

also $C_1 = 2.$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$y = 2 \cdot e^x \cdot \sin(2x) + e^x \cdot \cos(2x)$

f.) $y^{(4)} - 8y''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0$

Charakteristisches Polynom $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 42\lambda^2 - 104\lambda + 169$

Nullstellen bei $\lambda_{1|2} = 2 \pm 3j$, doppeltes Nullstellenpaar

Basislösungen:

$y_1 = e^{2x} \cdot \sin(3x), y_2 = e^{2x} \cdot \cos(3x),$

$y_3 = x \cdot e^{2x} \cdot \sin(3x), y_4 = x \cdot e^{2x} \cdot \cos(3x).$

Allgemeine Lösung:

$e^{2x} \cdot (C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x) + C_3 \cdot x \cdot \sin(3x) + C_4 \cdot x \cdot \cos(3x))$